ریاضیات مهندسی :

①

احمد پاکباز

AHMAD . PAKBAZ

- هرگاه کره صلب همگن بوده، انتقال گرما در شرایط پایا صورت گیرد تغییرات در جهت $\theta$ و $\phi$ صفر است و فقط تغییرات شعاعی داریم
- هرگاه استوانه صلب همگن باشد تغییرات در جهت $\theta$ صفر است
- الف) اگر شعاع استوانه خیلی کوچک باشد انتقال گرما را می‌توان یک بعدی و در جهت شعاعی در نظر گرفت

ب) اگر سطح مقطع استوانه عایق باشد انتقال گرما در جهت شعاعی صورت می‌گیرد.

ج) اگر سطح جانبی استوانه عایق باشد و نسبت طول به شعاع بزرگ باشد. انتقال گرما را می‌توان یک بعدی در جهت محوری

د) هرگاه طول استوانه زیاد باشد می‌توانیم از انتقال گرما در جهت طول ($z$) صرفنظر کنیم

$\partial^2 T / \partial z^2 = 0$

- در مدل سازی سیستم کروی در جهت $r$ ، در صورت وجود مشتق دوم نسبت به $r$ باید یکی از عبارات زیر وجود داشته باشد:

- $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$
- $r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial u}{\partial r}$
- $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right)$
- $1/r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right)$
- $\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}$

- در معادله حالت پایدار غلظت ماده واکنش دهنده در کاتالیست یا انتقال گرما برای پره‌هایی با مقطع متغیر به روش زیر عمل می‌کنیم:

- $x = 0 \Rightarrow k_0(0) \to \infty \Rightarrow c_2 = 0$ و $c_1 \neq 0$
- حالت کلی : $c_1 I_0(ax^\beta) + c_2 k_0(ax^\beta)$ یا $c_2 k_0(r\sqrt{k/D}) + c_1 I_0(r\sqrt{k/D})$

کاه سری فوریه:

- سری فوریه $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right)$

$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$

$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos \frac{n\pi x}{L}\,dx$

$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin \frac{n\pi x}{L}\,dx$

- اگر تابع زوج باشد، $b_n$ صفر است.
- اگر تابع فرد باشد، $a_0$ و $a_n$ صفر است.

- در برخی موارد با انجام اعمال جبری و مثلثاتی می‌توان سری فوریه را حل کرد.

$f(x) = (\sin x + \cos 2x)^2 \quad , -\pi < x < \pi$

$$\sin^2 x + \cos^2 2x + 2\sin x \cos 2x = \underbrace{\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \sin 3x - \sin x}_{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)}$$

• اگر سری فوریه در نقطه‌ای ناپیوسته باشد برای محاسبه باید میانگین حد چپ و راست را حساب کرد.

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)$$

• بسط نیم دامنه سینوسی (فرد)

$$a_0 = 0 \;,\quad a_n = 0 \;,\quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

• بسط نیم دامنه کسینوسی (زوج)

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \;,\quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \;,\quad b_n = 0$$

• تساوی پارسوال در مواردی که مخرج سری فوریه $L$ یا $2L$ باشد:

$$\frac{1}{L}\|f\|^2 = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

$$\rightarrow \|f\| = \left[\int_a^b f(t)^2\,dt\right]^{1/2}$$

• مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری فوریه:

هرگاه $f'$ در بازه $[-L,L]$ قطعه‌ای پیوسته و $f(-L) = f(L)$ باشد:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}t + b_n\sin\frac{n\pi}{L}t\right)$$

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\left(-a_n\sin\frac{n\pi}{L}t + b_n\cos\frac{n\pi}{L}t\right)$$

$$\int_0^t f(t)\,dt = a_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}\left(a_n\sin\frac{n\pi}{L}t - b_n\cos\frac{n\pi}{L}t\right) \rightarrow$$ برای توابع متناوب

• سری فوریه مختلط:

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{L}t} \qquad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,e^{-\frac{in\pi}{L}t}\,dt$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

• انتگرال فوریه:

- توابع غیرمتناوب

$$f(t) = \int_0^{\infty}\left[A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t\right]d\omega$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$$

• انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی :

- $f(t) = \int_0^\infty A(\omega) \cos \omega t \, d\omega$

$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \cos \omega t \, dt$

- $f(t) = \int_0^\infty B(\omega) \sin \omega t \, d\omega$

$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, dt$

- ابتدا صورت تابع نگاه می‌کنیم اگر $t$ در کنار sin آمده انتگرال سینوسی و اگر $t$ در کنار cos آمده، انتگرال کسینوسی است.

• تبدیل فوریه :

- $F\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$
- $F^{-1}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega$
- $F_c\{f(t)\} = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty f(t) \cos \omega t \, dt$ • تبدیل فوریه کسینوسی
- $F_s\{f(t)\} = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, dt$ • تبدیل فوریه سینوسی

• خواص تبدیل فوریه :

- $F\{f(at)\} = \frac{1}{a} F(\omega/a)$
- $F\{e^{iax} f(t)\} = F(\omega - a)$
- $F\{f(t-a)\} = e^{-ia\omega} F(\omega)$
- $F\{t^n f(t)\} = i^n F^n(\omega)$

• نرم تابع :

- $\| f \| = \left[ \int_a^b f_{(t)}^2 \, dt \right]^{1/2}$

• مجموعه‌های $\left\{ \sin \frac{n\pi}{l} \right\}_{n=1}^{\infty}$ , $\left\{ 1, \cos \frac{n\pi}{l} \right\}$ روی فاصله $[-\pi, \pi]$ متعامدند.

• مجموعه‌های $\left\{ \sin 2\pi n/l \, t \right\}$ و $\left\{ 1, \cos 2\pi n/l \, t \right\}$ روی فاصله $[0, \pi]$ متعامدند.

• تعامد چندجمله‌ای لژاندر:

- چندجمله لژاندر در بازه $[-1, +1]$ متعامدند.

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0 \qquad m \neq n$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1} \qquad \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ \frac{2}{2n+1} & n = 1 \end{cases}$$

- توابع متعامد:

$$\langle \varphi_n , \varphi_m \rangle = \int_a^b \varphi_n(x)\, \varphi_m(x)\, dx = 0$$

نکته: مقادیر معادله دیفرانسیل $y'' + \lambda y = 0$ برابر است با:

الف) هرگاه $y(0) = y(L) = 0$ یا $y'(0) = y'(L) = 0$ باشد به صورت $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ است.

ب) هرگاه $y(0) = y'(L) = 0$ یا $y'(0) = y(L) = 0$ باشد به صورت $\lambda_n = \left(\frac{2n \pm 1}{2L}\pi\right)^2$ است.

• معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول:

① $P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} = R \rightarrow P z_x + Q z_y = R$

② $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dZ}{R}$

مثال: $P = x$, $Q = -y$, $R = 0$ ; $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} \rightarrow \ln x = -\ln y + C_1$ ; $C_1 = xy$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \longrightarrow u = f(xy)$$

- مرتبه دوم:

① $A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + u = G$

- شکل کانونی

② $\Delta = B^2 - 4AC$

1) $\Delta > 0 \rightarrow$ هذلولی‌گون — 1) معادلات هذلولی‌گون: $(Z_{xy})$

2) $\Delta = 0 \rightarrow$ سهمی‌گون — 2) معادلات سهمی‌گون: $(Z_{yy})$

3) $\Delta < 0 \rightarrow$ بیضی‌گون — 3) معادلات بیضی‌گون: $(Z_{xx})$

- شرایط مرزی:

- تعداد شرایط مرزی لازم مربوط به یک متغیر مستقل عبارت است از مرتبه معادله دیفرانسیل نسبت به آن متغیر.

- تعداد شرایط اولیه لازم عبارت است از مرتبه معادله دیفرانسیل نسبت به زمان.

مثال) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}$ ← دو شرط مرزی و یک شرط اولیه لازم است.

- شرط مرزی نوع اول $T(0,t)=t_s$ $\longleftarrow$ همگن نوع اول در $x_{(0)}=0$
- شرط مرزی نوع دوم $\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0}$ $\longleftarrow$ همگن نوع دوم در $x_{(L)}=0$
- شرط مرزی نوع سوم $\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=L}$

نکته: برای تعیین جواب معادله دیفرانسیل $\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ (معادله رسانا):

1) هرگاه دو شرط مرزی از نوع اول یا هر دو از نوع دوم باشد مقادیر ویژه، $\lambda_n=\frac{n\pi}{L}$ و هرگاه یکی از شرایط مرزی نوع اول و دیگری نوع دوم باشد، مقادیر ویژه $\lambda_n=\frac{2n\pm1}{2L}\pi$ می‌باشند.

2) هرگاه شرط مرزی در $x_{(0)}=0$، همگن نوع اول باشد تابع ویژه بصورت $\sin\lambda_n x$ و هرگاه شرط مرزی در $x_{(L)}$ همگن نوع دوم باشد، بصورت $\cos\lambda_n x$ است.

3) هرگاه $t\to\infty$ آنگاه مقدار $\theta$ یا همان مقدار محدودی است و باید توان $e$ منفی باشد.

4) هرگاه شرایط مرزی بصورت $T(0,t)=A$ و $T(L,t)=B$ آنگاه جواب: $A+\frac{B-A}{L}x+\sum_{n=1}^{\infty}\cdots$

نکته: برای تعیین جواب معادله دیفرانسیل $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ [معادله لاپلاس گرمای پایا]:

1) در این گونه معادلات ابتدا با تغییر متغیر $\theta=T-T_0$ نوع شرایط مرزی را از نظر همگن و غیرهمگن بودن تعیین می‌کنیم

2) جهت همگن $z$: $c_1\sinh\lambda_n z+c_2\cosh\lambda_n z$ یا $d_1e^{\lambda_n z}+d_2e^{\lambda_n z}$

جهت ناهمگن $z$: $c_1\sin\lambda_n z+c_2\cos\lambda_n z$

در شرایطی که شرایط مرزی همگن باشد ($z=0$) در جواب معادله شاهد $\sinh$، $\cosh$ هستیم و در صورتی که شرایط مرزی ناهمگن باشد ($z\neq0$) در جواب معادله شاهد $\sin$ و $\cos$ هستیم.

$T_0\neq T_\infty$

3) در تغییر متغیر $\theta=T-T_0$، $T_\infty=0$ می‌شود.

4) برای حل معادلات لاپلاس گرما (حالت پایا) باید حداقل یک شرط ناهمگن وجود داشته باشد.

• حل معادلات با روش ترکیب متغیرها :

- برای حل معادله دیفرانسیل جزئی $\partial u/\partial t = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ از تغییر متغیر $\eta = \frac{x}{\sqrt{m\alpha t}}$ استفاده می‌کنیم و به معادله دیفرانسیل معمولی $u'' + \frac{m}{2}\eta u' = 0$ می‌رسیم.

✓ $\eta = \frac{x}{\sqrt{t}} \rightarrow m = 1 , \alpha = 1$

نکته : مناسب‌ترین روش برای حل معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی متغیر با زمان روش لاپلاس و دیگری روش ترکیب متغیرها می‌باشد.

• مسائل مقدار مرزی ( BVP ) و مقدار اولیه ( IVP ) :

- هرگاه مقدار تابع در دو نقطه داده شود، مسأله شرط مرزی ( BVP ) است.

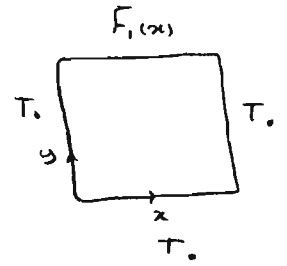
- برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی با مقدار اولیه، می‌توان از روش‌های تیلور، اویلر و رانگ کوتا استفاده کرد.

- برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط مرزی می‌توان از روش‌های تفاضل محدود و تیراندازی ( Shooting ) استفاده کرد.

- برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با شرایط مرزی یا شرایط اولیه می‌توان از روش‌های لاپلاس و ترکیب متغیرها و ... استفاده کرد.

* نکته : هرگاه در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مقدار $t = \infty$ یا $R = \infty$ یا $t = R =$ محدود در این صورت توان $e$ باید مثبت گردد و اگر شرط $\theta = x = 0$ نیز وجود داشته باشد جواب حاصل به صورت Sin خواهد بود.

* نکته : هرگاه در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مقدار $t = R \rightarrow \infty$ آنگاه توان $e$ باید منفی گردد و اگر شرط $\theta = x = 0$ وجود داشت جواب به صورت Sin و اگر $\frac{d\theta}{dx}\big|_{x=0} = 0$ به صورت Cos خواهد بود.




• سه شرط از شرایط مرزی همگن و تنها یکی از شرایط ناهمگن است.
در جهت x شرط مرزی ناهمگن است بنابراین جواب باید شامل Sin یا Cos باشد و در جهت y همگن است و جواب شامل Sinh و Cosh است.